

imię i nazwiskoklasa
nazwa Szkoły
imię i nazwisko Twojego nauczyciela matematyki



„ZŁOTA ŻABA” 2003/2004
Konkurs w Dziedzinie Matematyki
Organizator: Fundacja Edukacji Społecznej EKOS
etap II

Ciesz się, że jesteś finalistą naszego konkursu. Przed Tobą kolejne zadania, na których rozwiązanie masz 120 minut. Wszystkie zadania musisz rozwiązać na otrzymanych kartkach papieru kancelaryjnego, które podpisz swoim imieniem i nazwiskiem. Zaznacz, które kartki należą do czystopisu, a które do brudnopisu. Czytaj uważnie polecenia, sporządzaj staranne rysunki, dbaj o poprawność obliczeń. Nie możesz używać kalkulatora.

Złota Żaba

Zadanie 1. (15 punktów)

Wyznacz sumę: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$

Zadanie 2. (38 punktów)

Kierowca samochodu porusza się po torze wyścigowym z jednakową prędkością. Tor jest tak wyprofilowany, że nie można przekroczyć prędkości $200 \frac{km}{h}$. Kierowca zauważył, że licznik przejechanych kilometrów wskazywał liczbę 13931, którą czyta się jednakowo w obie strony. Po upływie dokładnie 2 godzin licznik ponownie wskazywał liczbę o podanej wyżej własności. Z jaką prędkością poruszał się samochód w ciągu tych dwóch godzin?

Zadanie 3. (22 punkty)

Zakładamy, że Ziemia jest kulą. Ziemię opasano drutem wzdłuż równika tak, aby drut dokładnie przylegał do jej powierzchni. Następnie długość tego drutu zwiększono o 6,28 metra i podniesiono go na jednakową wysokość na całej długości. Czy pod tym drutem przejdzie lalka o wysokości 25 cm? Przyjmij, że $\pi = 3,14$.

Zadanie 4. (30 punktów)

Zapalono dwie świece o różnych długościach i grubościach. Dłuższa z nich spala się zupełnie w ciągu 3 godzin, a krótsza – w ciągu 5 godzin. Długości obu świec wyrównały się po dwóch godzinach palenia się tych świec. Ile razy jedna świeca była dłuższa od drugiej przed zapaleniem?

Zadanie 5. (35 punktów)

Dwa pociągi, z których każdy ma 40 wagonów, spotykają się na pojedynczym torze. Do tego toru dochodzi boczny tor, który może pomieścić lokomotywę i najwyżej 20 wagonów. W jaki sposób te pociągi mogą się wyminąć?



Zadanie 6. (40 punktów)

Do dwóch okręgów stycznych zewnętrznie poprowadzono wspólną styczną nieprzechodzącą przez ich punkt styczności. Oblicz pole figury zawartej między styczną i okręgami wiedząc, że promień jednego z nich ma długość 2 cm, a drugiego 5 cm.

Zadanie 7. (20 punktów)

Liczbę a , której odwrotność jest średnią arytmetyczną odwrotności dwóch danych liczb dodatnich b i c , nazywamy średnią harmoniczną liczb b i c .

1. Oblicz średnią harmoniczną liczb 5,5 oraz $2\frac{1}{6}$.

2. Wykaż, że iloczyn średniej arytmetycznej oraz średniej harmoniczej dwóch liczb dodatnich jest równy iloczynowi tych liczb.