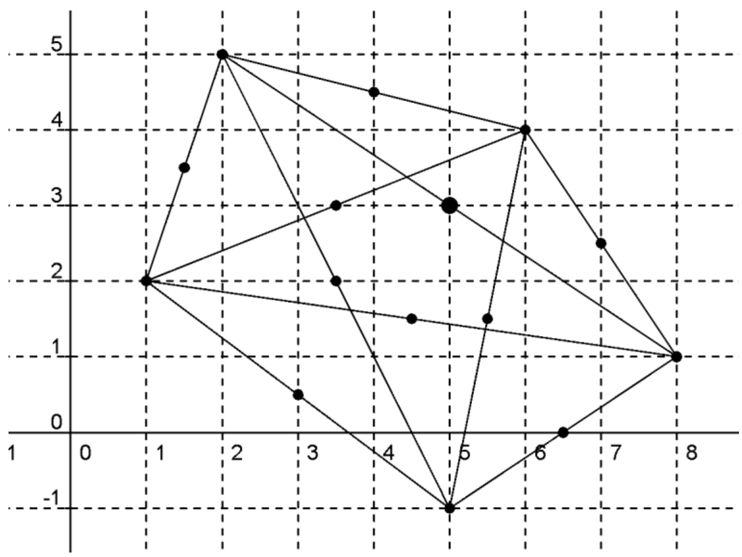
„ZŁOTA ŻABA” 2007/2008
etap I – 5 grudnia 2007
Konkurs w Dziedzinie Matematyki
Organizator: Fundacja Edukacji Społecznej „EKOS”

Cieszę się, że bierzesz udział w naszym Konkursie. Przed Tobą zadania, na których rozwiązanie masz 90 minut. Zadania musisz wykonać na osobnych, otrzymanych od nauczyciela kartkach. Zanim to zrobisz, u góry kartek napisz swoje imię i nazwisko, nazwę szkoły, imię i nazwisko Twojego nauczyciela matematyki. Czytaj uważnie polecenia, dbaj o precyzję i poprawność językową swoich wypowiedzi, przede wszystkim jednak myśl, myśl, myśl ...

Zadanie 1. (18 pkt)
Podczas lekcji matematyki związanej z tematem prostokątnego układu współrzędnych uczniowie dowiedzieli się, że współrzędne x_S i y_S punktu S, który jest środkiem odcinka o końcach w punktach A i B, są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych punktów A i B, tzn. $x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$ i $y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Nauczyciel poprosił uczniów, by narysowali w zeszycie układ współrzędnych i zaznaczyli w nim pięć różnych dowolnie wybranych punktów kratowych (punktów, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi), a następnie połączyli każde dwa z nich odcinkiem i wyznaczyli współrzędne środków tych odcinków.



Okazało się, że każdy z uczniów miał też w zeszycie co najmniej jeden odcinek, którego środek był punktem kratowym. Uczniowie byli zaskoczeni. Zaczęli się zastanawiać czy to przypadek, czy może sytuacja, w której żaden ze środków odcinków łączących pięć różnych dowolnie wybranych punktów kratowych nie jest punktem kratowym, jest po prostu niemożliwa.
Następnego dnia Piotr, jeden z uczniów tej klasy, przedstawił podczas lekcji rozumowanie, które przekonało wszystkich, że to nie był przypadek. Piotr rozpoczął od rozpatrzenia czterech przypadków dotyczących parzystości współrzędnych punktów kratowych.
Przedstaw w punktach etapy rozumowania Piotra.

Zadanie 2. (16 pkt)
O godzinie 15^{00} zamyślona Żaba spojrzała na zegar.
– Interesujące – pomyślała – wskazówki zegara tworzą kąt prosty.
Ile czasu Żaba poczeka aż wskazówki ponownie utworzą kąt prosty?
Wynik podaj z dokładnością do minuty.

Zadanie 3. (12 pkt)

Biologowie, kiedy chcą dokonać porównania dwóch obszarów leśnych, posługują się pojęciem tzw. odległości gatunkowej. Wyrażają ją liczbą, która jest ilorazem $\frac{a+b-2c}{a+b-c}$,gdzie a jest liczbą gatunków występujących na jednym z obszarów, b – liczbą gatunków występujących na drugim z obszarów, zaś c – liczbą gatunków występujących na obu obszarach (tzn. wspólnych gatunków).

A. Oblicz odległość gatunkową obszaru, na którym występuje buk, sosna, świerk, jawor i modrzew oraz obszaru, na którym występuje buk, jawor, lipa i klon.

B. Uzasadnij, że przedstawiony wyżej iloraz, według którego oblicza się odległość gatunkową, nie może przyjąć wartości większej niż 1. Ile gatunków wspólnych występuje na obszarach, których odległość gatunkowa wyrażona jest liczbą 1?

Zadanie 4. (10 pkt)

Działkę w kształcie prostokąta podzielono na cztery mniejsze prostokątne działki (*patrz rysunek*). Jakie jest pole powierzchni czwartej działki, jeżeli pola powierzchni trzech działek wynoszą 48, 60 i 64 ary?

48 a	60 a
64 a	

Zadanie 5. (15 pkt)

Żaba upiekła okrągłe babeczki o średnicy 10 cm każda. Chce je poustawiać na tacy, aby podać je gościom. Oblicz, jaka największa liczba babeczek zmieści się na prostokątnej tacy o wymiarach 50 cm x 80 cm. Przedstaw to na schematycznym rysunku.

Zadanie 6. (15 pkt)

Wiemy, że dwa samochody przebyły tę samą drogę. Jeden z nich przez połowę czasu jazdy poruszał się z prędkością 80 km/h, a przez połowę – z prędkością 120 km/h. Drugi z nich połowę całej trasy pokonał z prędkością 80 km/h, a połowę – z prędkością 120 km/h.

Jaka była średnia prędkość poruszania się każdego z samochodów?

Zadanie 7. (14 pkt)

Wyobraź sobie trójkąt równoboczny o boku długości 4 cm. Czy jest możliwe umieszczenie w tym trójkącie siedemnastu punktów w taki sposób, aby każde dwa punkty były od siebie odległe o więcej niż 1 cm? Odpowiedź uzasadnij.