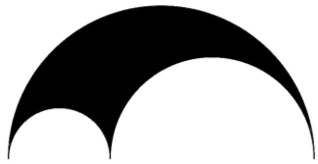
„ZŁOTA ŻABA” 2009/2010
etap II – 20 lutego 2010
Konkurs w Dziedzinie Matematyki
Organizator: Fundacja Edukacji Społecznej „EKOS”

Cieszę się, że bierzesz udział w naszym Konkursie. Przed Tobą zadania, na których rozwiązanie masz 120 minut. Zadania musisz wykonać na osobnych, otrzymanych od nauczyciela kartkach. Zanim to zrobisz, u góry kartek napisz swoje imię i nazwisko, nazwę szkoły, imię i nazwisko Twojego nauczyciela matematyki. Czytaj uważnie polecenia, dbaj o precyzję i poprawność językową swoich wypowiedzi, przede wszystkim jednak myśl, myśl, myśl ...

Twoja Żaba

Zadanie 1. (20 pkt.)
Arbelon (zwany też sierpem Archimedesa) to figura geometryczna ograniczona trzema półokręgami (jak na rysunku). Wykaż, że jej pole wyraża się wzorem $P = \pi ab$ (gdzie a i b to promienie mniejszych półokręgów).



Zadanie 2. (20 pkt.)
Wyznacz cyfrę jedności liczby $5^{12} + 10^{15} + 9^{11}$.

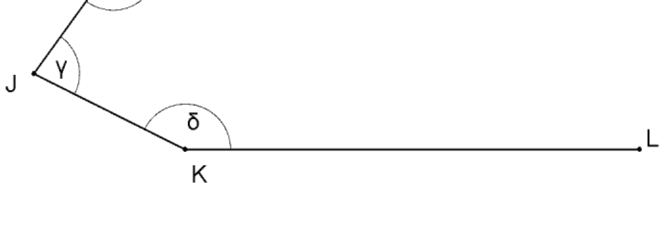
Zadanie 3. (30 pkt.)
Przedstaw liczbę 10 983 jako sumę dwóch liczb naturalnych, z których pierwsza jest podzielna przez 5, a druga powstaje z pierwszej przez skreślenie jej ostatniej cyfry.

Zadanie 4. (40 pkt.)
Na półce w sekretariacie stoi szesnaście skoroszytów z dokumentacją kolejnych edycji konkursu „Złota Żaba”. Ich kolejność, z pewnego powodu, jest dosyć przypadkowa: XVI, I, IX, XIII, XI, XV, X, IV, III, II, VIII, VII, XII, VI, XIV, V. Wyznacz minimalną liczbę przestawień potrzebnych do uporządkowania wszystkich tomów. Uwaga: Jako przestawienie należy rozumieć wyjęcie konkretnego tomu i umieszczenie go w wybranym miejscu (połączone ewentualnie z koniecznym przesunięciem pewnych tomów).

Zadanie 5. (20 pkt.)
Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite x, y, z takie, że

$$x + 7y - 4z = 11 \text{ i } 5x - y - 8z = 6.$$

Zadanie 6. (20 pkt.)
Rysunek przedstawia łamaną, której dwa boki GH oraz KL są równoległe. Oblicz $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.



Zadanie 7. (50 pkt.)
W czworościanie foremnym ABCD (o krawędziach długości a) środek krawędzi BC oznaczono jako K, a punkt – który dzieli krawędź do niej skośną w stosunku 1:3 – jako M. Wyznacz taki punkt L na jednej z pozostałych krawędzi czworościanu, aby obwód trójkąta KLM był jak najmniejszy. Wyznacz ten obwód.