„ZŁOTA ŻABA" 2010/2011

etap II – 12 marca 2011

Konkurs w Dziedzinie Matematyki

Organizator: Fundacja Edukacji Społecznej „EKOS"

Cieszę się, że bierzesz udział w naszym Konkursie. Przed Tobą zadania, na których rozwiązanie masz 90 minut. Zadania musisz wykonać na osobnych, otrzymanych od nauczyciela kartkach. Zanim to zrobisz, u góry kartek napisz swoje imię i nazwisko, nazwę szkoły, imię i nazwisko Twojego nauczyciela matematyki. Czytaj uważnie polecenia, dbaj o precyzję i poprawność językową swoich wypowiedzi, przede wszystkim jednak myśl, myśl, myśl ...

Zadanie 1. Pająk i mucha (28 punktów)

Pokój ma wymiary 4 m, 5 m i 3 m. Gdyby przyjąć, że wierzchołek jednego z kątów pokoju leży w punkcie (0,0,0) trójwymiarowego układu współrzędnych, gdzie pierwsza współrzędna oznacza szerokość, druga długość, trzecia wysokość, to położenie pająka wyznacza punkt o współrzędnych (1,1,3), a muchy (4, 5,1). Ile wynosi najkrótsza powietrzna droga pająka do muchy? O ile jest krótsza od najkrótszej drogi prowadzonej po ścianach?

Zadanie 2. (28 punktów)

Narysuj wykres funkcji f(n) oraz wykres symetryczny względem osi x do wykresu funkcji f(n), która każdej liczbie złożonej mniejszej niż 25 przyporządkowuje liczbę jej dzielników. Dla jakich argumentów funkcja f(n) jest stała? Ile wynosi jej najmniejsza i największa wartość?

Zadanie 3. (32 punkty)

Rozwiąż cyfrową krzyżówkę. Zacznij od haseł, które są jednoznaczne.

Pionowo:

1. palindrom (liczba czytana od lewej i prawej jest taka sama)
2. liczba podzielna przez 18
4. cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry jedności
7. trzykrotność liczby 7
8. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

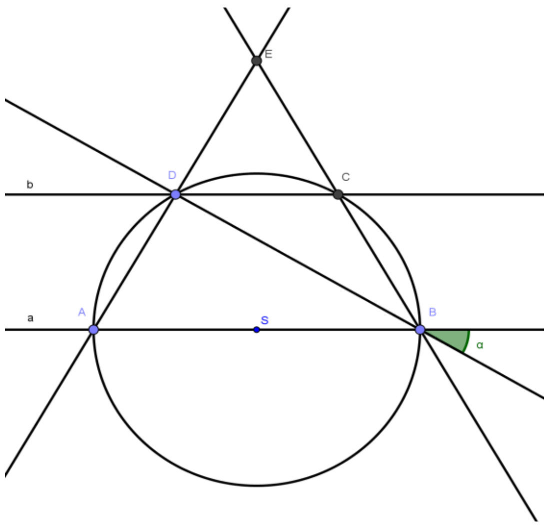
1	2		
3		4	
5		6	7
	8		

Poziomo:

1. sześcian najmniejszej liczby złożonej
3. suma cyfr tej liczby jest równa 6
5. cyfra setek tej liczby jest dwa razy mniejsza od cyfry jedności
6. dwucyfrowa nieparzysta potęga dwójki

Zadanie 4. (24 punkty)

W oparciu o rysunek obok wyznacz miary kątów w trójkątach ABD, BCD i DCE, wiedząc, że kąt $\alpha = 30°$ oraz proste a i b są równoległe. Oblicz obwód i pole trójkąta BDC, jeśli wiadomo, że promień okręgu ma 3 cm długości.

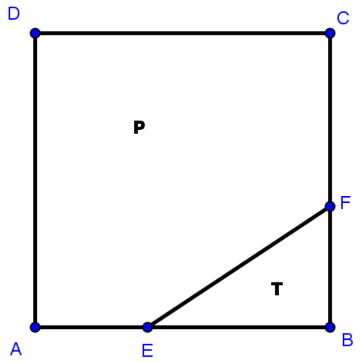


Zadanie 5. (24 punkty)

Korzystając ze wzoru $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią, oblicz liczbę a = $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots \frac{1}{99\cdot 100}$.

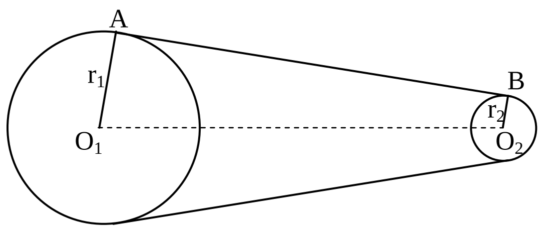
Zadanie 6. (24 punkty)

Odcinek EF (rys. obok) o długości 3 łączy punkty sąsiednich boków kwadratu o boku długości 4. Odcinek ten dzieli kwadrat na trójkąt T i pięciokąt P. Jakie powinny być boki tego trójkąta, aby stosunek pól T i P był możliwie największy? Ile wynosi ten największy stosunek?



Zadanie 7. (20 punktów)

Dwa koła o środkach O_1 i O_2 i promieniach odpowiednio r_1=2,6 cm i r_2=0,8 cm są elementami pewnej żabiej maszyny. Odległość między środkami kół jest równa 8,2 cm. Oblicz długość odcinka AB, jeżeli pas transmisyjny nałożono na koła tak, jak przedstawiono na rysunku.



Zadanie 8. (20 punktów)

(zadanie z lat ubiegłych)

Antykwariusz kupił dwa przedmioty i zapłacił za nie 250 zł. Następnie sprzedał je z zyskiem 24%. Ile zapłacił za każdy przedmiot, jeśli pierwszy przedmiot sprzedał o 15% drożej, a drugi o 30% drożej?