

imię i nazwisko _____ klasa _____

imię i nazwisko Twojego nauczyciela matematyki _____

nazwa szkoły _____



„ZŁOTA ŻABA” 2021/2022

etap II – 5 marca 2022

Konkurs w Dziedzinie Matematyki

Organizator: Fundacja Edukacji Społecznej EKOS

Ciesz się, że bierzesz udział w naszym Konkursie. Przed Tobą zadania, na których rozwiązanie masz 120 minut. Rozwiązania wszystkich zadań przedstaw na kartkach papieru kancelaryjnego. Zanim to zrobisz, u góry kartek napisz swoje imię i nazwisko, nazwę szkoły, imię i nazwisko Twojego nauczyciela matematyki. Czytaj uważnie polecenia, dbaj o precyzję i poprawność językową swoich wypowiedzi, przede wszystkim jednak myśl, myśl, myśl ...

Powodzenia! – Twoja Żaba

Zadanie 1. (0–25 pkt.)

Rozważmy następujący algorytm:

1. Wybieramy dowolną liczbę naturalną.
2. Obliczamy sumę kwadratów cyfr wchodzących w skład zapisu liczby.
3. Jeżeli otrzymamy liczbę 1, kończymy obliczenia. W przeciwnym wypadku powtarzamy tę operację dla kolejno otrzymanych wyników tak długo, aż otrzymamy liczbę 1 lub wyniki zaczną się powtarzać.

Liczbę, dla której w wyniku zastosowania powyższego algorytmu otrzymamy wynik 1, nazywamy liczbą wesołą, w przeciwnym wypadku jest liczbą niewesołą albo smutną. Wesołe liczby pierwsze to liczby, które jednocześnie są wesołe i pierwsze.

Przykład: Sprawdźmy, czy liczba 91 jest liczbą wesołą:

$$9^2 + 1^2 = 82$$

$$6^2 + 8^2 = 100$$

$$8^2 + 2^2 = 68$$

$$1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

Zatem dowiedliśmy, że 91 jest liczbą wesołą.

Czy największa dwucyfrowa liczba pierwsza jest wesoła, czy smutna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2. (0–25 pkt.)

Większość substancji, wraz ze wzrostem temperatury, zwiększa swoją objętość. Woda zachowuje się nietypowo – w przedziale temperatur od 0° do 4° C woda zmniejsza swoją objętość. Zatem lód ma większą objętość niż woda, z której powstał.

Lód, zmieniając się w wodę przy ciśnieniu atmosferycznym (1013,25 hPa), zmniejsza swoją objętość o $\frac{1}{12}$. O jaką część zwiększy się objętość wody, gdy zamieni swój stan skupienia w lód w identycznych warunkach?

Zadanie 3. (0–25 pkt.)

Wyznacz ostatnią cyfrę liczby $(2022^2 + 2022^0 + 2022^2 + 2022^2)^{2022}$.

Zadanie 4. (0–25 pkt.)

Kwadratem magicznym nazywamy kwadratową tablicę (tabelę), w którą wpisano liczby w taki sposób, że ich suma w każdym wierszu, w każdej kolumnie oraz w obu przekątnych jest taka sama. Za najslawniejszy kwadrat magiczny uważany jest kwadrat umieszczony na miedziorycie *Melancholia* wykonany przez wybitnego artystę niemieckiego renesansu Albrechta Dürera w 1514 roku.

8		

Uzupełnij tablicę liczbami naturalnymi od 1 do 9, tak aby otrzymać kwadrat magiczny.

Zadanie 5. (0–25 pkt.)

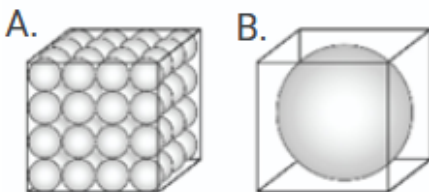
Wyznacz miarę kąta, który tworzą dwie najkrótsze przekątne dwunastokąta foremnego poprowadzone z tego samego wierzchołka.

Zadanie 6. (0–25 pkt.)

W dzbanku i w garnku znajduje się w sumie pół litra wody. Z dzbanka przelano do garnka tyle wody, że objętość wody w garnku została podwojona. Następnie z garnka przelano do dzbanka tyle, że podwoiła się zawartość dzbanka. Po tych zabiegach w obu naczyniach było tyle samo wody. Ile wody było w każdym naczyniu na początku?

Zadanie 7. (0–25 pkt.)

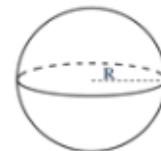
Pudełko A jest wypełnione po brzegi kulkami pełnymi czekolady. Kulki są ułożone w czterech warstwach. Pudełko B, tej samej wielkości, mieści w sobie tylko jedną, idealnie pasującą pełną kulę czekoladową. W którym pudełku jest więcej czekolady? Uzasadnij odpowiedź.



Wzory na objętość i pole powierzchni kuli o promieniu R

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$P = 4\pi R^2$$

**Zadanie 8. (0–25 pkt.)**

Trzy żabki stanęły w rzędzie tak, że ostatnia z nich widzi pierwszą i drugą, druga żabka widzi tylko pierwszą, a pierwsza nie widzi żadnej z nich. Żabki postanowiły się przystroić i wyciągnęły pudełko, w którym znajdowało się 5 kapeluszy: 3 białe i 2 czerwone. Każda żabka losowała i zakładała na głowę kapelusz z zamkniętymi oczami. Gdy otworzyły oczy, ostatnia (widząc kolory kapeluszy żabek stojących przed nią) powiedziała: „Nie wiem, jakiego koloru jest mój kapelusz”. Druga żabka (słyszając odpowiedź trzeciej żabki i widząc kolor kapelusza żabki stojącej przed nią) powiedziała: „Nie wiem, jakiego koloru kapelusz wybrałam”. Pierwsza żabka, słyszając odpowiedzi pozostałych żabek, po chwili namysłu prawidłowo powiedziała, jakiego koloru jest jej kapelusz. Jakiego koloru jest kapelusz pierwszej żabki? Odpowiedź uzasadnij.